«Δυναμικές και ...σημα(σ)ιολογικές αναπαραστάσεις κλασμάτων»

Αλέξιος Μαστρογιάννης[1], Αντιγόνη Τρύπα[2]

[1] Εκπαιδευτικός Π.Ε, Μαθηματικός Msc, Επιμορφωτής ΤΠΕ-Ε, 16ο Δημ. Σχολείο Αγρινίου
alexmastr@sch.gr
[2] Εκπαιδευτικός Π.Ε, 16ο Δημ. Σχολείο Αγρινίου
tryanta@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Πολλές έρευνες αλλά και η καθημερινή σχολική πραγματικότητα ενοχοποιούν τους κλασματικούς αριθμούς, ως παρελκυστικούς παράγοντες μάθησης και αριθμητικές περιοχές συχνών, μαθητικών ολισθημάτων.

Η παρούσα πρόταση αφού κάνει μια μικρή ιστορική αναδρομή στην επινόηση και χρήση των κλασμάτων, από τους αρχαίους πολιτισμούς, ακολούθως αναφέρεται στην υπερίσχυση του σημερινού τρόπου γραφής τους, ως μιας σταδιακά τροποποιούμενης, ινδοαραβικής πρότασης. Στη συνέχεια εξετάζονται οι παράγοντες και οι εννοιολογικές δυσκολίες που δυσχεραίνουν και παρακωλύουν την κατανόηση των κλασματικών αριθμών, ειδικά σε μαθητές του Δημοτικού Σχολείου.

Κατόπιν, μέσω μιας διαθεματικής και τεχνολογικής προσέγγισης, προτείνεται οι κλασματικοί αριθμοί να προσεγγιστούν, μέσω της μελέτης σημαιών διάφορων κρατών του κόσμου, με ενεργοποίηση, πρωτίστως, του μοντέλου περιοχής ή εμβαδού. Τα εθνικά αυτά σύμβολα είναι σχεδιασμένα, με τη βοήθεια των λειτουργιών και εργαλείων που προσφέρει το γνωστό, εκπαιδευτικό λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας, Cabri Geometry II, ενώ παρουσιάζονται κατά αύξουσα δυσκολία, κυρίως, ως προς την κατασκευή τους. Επωδοί της κλασματικής αυτής πραγμάτευσης, με γεωγραφικές, εντούτοις, καταφυγές και με συμβολικών εμβλημάτων ερείσματα αποτελούν οι αρκετά δύσκολες στο σχεδιασμό τους αμερικανική και ελληνική σημαία.

Σε κάθε περίπτωση, λήφθηκαν υπόψη και τονίστηκαν στις προτεινόμενες δραστηριότητες, οι δυο συνιστώσες, οι δυο καίριες προϋποθέσεις κατά την ανάπτυξη της έννοιας των κλασμάτων (van de Walle, 2005): α) η ακέραια μονάδα πρέπει να αποτελείται από το σωστό αριθμό μερών και β) όλα τα μέρη πρέπει να είναι ίσα ή δίκαια μερίδια, ότι έχουν, δηλαδή το ίδιο μέγεθος (μήκος ή εμβαδό).

Τέλος, με καθαρά εμπεδωτικό και διασαφητικό χαρακτήρα, κατά τη σπουδή αυτή των κλασμάτων, παρέχεται η γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου δυο κλασματικών αριθμών, αλλά και μια, άκρως παραδειγματική,

«οπτική απόδειξη» (ικανή να κατανοηθεί, ίσως, ακόμα και από μαθητές του Δημοτικού Σχολείου) μιας δημοφιλούς, φθίνουσας γεωμετρικής προόδου.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Αναπαραστάσεις κλασμάτων, σημαίες κρατών, Cabri Geometry II, διαθεματικότητα*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ουσιαστικό μέρος της παιδικής μαθηματικής ανάπτυξης αποτελεί η κατανόηση των κλασμάτων. Μάλιστα η εμπειρία των μαθητών με τους κλασματικούς αριθμούς ξεκινά, πριν την είσοδό τους στους σχολικούς ρυθμούς. Ο πιο γνωστός, οικείος και για αυτό δημοφιλής διαιρέτης – παρονομαστής, από την νηπιακή, ακόμα, ηλικία είναι ο αριθμός 2 (από την έννοια του «μισού»).

Κλάσματα χρησιμοποιούνταν και από τους αρχαίους λαούς και πολιτισμούς. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, στα ιερογλυφικά τους, εισήγαγαν κλασματικές μονάδες, με την τοποθέτηση ενός ειδικού οβάλ συμβόλου ( ), πάνω από τον αριθμό, που αντιπροσώπευε τον παρονομαστή. Ειδικά, τους κλασματικούς αριθμούς 1/2 και 2/3, οι Αιγύπτιοι τους παρίσταναν με ιδιαίτερα σύμβολα (για παράδειγμα, το σύμβολο αναπαριστούσε το κλάσμα 1/2).

Στον πάπυρο του Rhind (ή Ahmes) ανακαλύφθηκαν και «ιερατικές» κλασματικές μονάδες που δηλώνονταν με την σχεδίαση μιας, υπερκείμενης των παρονομαστών, τελείας. Δικό τους, ιδιαίτερο σύμβολο είχαν τα κλάσματα 1/2, 1/3, 1/4 και 2/3. Το «Χ» για παράδειγμα, ήταν το σύμβολο του 1/4 (Cajori, 2007).

Επίσης, οι Βαβυλώνιοι ανέπτυξαν ένα δύσχρηστο, ελλιπές, μικτό (προσθετικό και θεσιακό, τμηματικά), εξηνταδικό αριθμητικό σύστημα. Η δομή του ήταν, κάπως, περίπλοκη αφού για να αναπαραστήσει τους αριθμούς μέχρι το 59 χρησιμοποιούσε και συνδύαζε, προσθετικά, μόνο 2 σύμβολα, μια σφήνα ( ), για το σύμβολο των μονάδων και μια γωνία ( ), για να δηλώνονται οι δεκάδες, δεν υπήρχε σύμβολο για το μηδέν, ενώ η γραφή μεγαλύτερων αριθμών επιτυγχανόταν μέσω ενός θεσιακού συστήματος.

Τον αριθμό 60 συμβόλιζαν με το ίδιο σύμβολο των μονάδων (σφήνα) τον 2·60 με 2 σφήνες τις 10 εξηντάδες με το ίδιο σύμβολο των δεκάδων (γωνία), ενώ π.χ τις 80 εξηντάδες με 8 γωνίες. Αυτό είναι ένα από τα μειονεκτήματα του βαβυλωνιακού συστήματος. Οι 4 σφήνες μπορούσε να παριστάνουν τον αριθμό 4 ή τον 63 ή τον $3 \cdot 60^3$ και πολλούς άλλους.

Με το σύμβολο της σφήνας παρίσταναν επίσης και τα κλάσματα $\frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}, \frac{1}{60^3}$ κ.ο.κ., κάτι που προσθέτει και ένα άλλο ένα μειονέκτημα στο σύστημα αυτό. Ο αριθμός με 1 γωνία και πέντε σφήνες, ίσως, ήταν ο 15, ή ο 14,1 ή ο 13,2 ή ο 12,3 κλπ.

Επιπλέον, χρησιμοποιούσαν ειδικό σχεδιασμό και ονομασία για τον προσδιορισμό μερικών «έκτων», για τις κλασματικές μονάδες, δηλαδή, 1/2, 1/3, 1/6 και τα κλάσματα 2/3 και 5/6, στα οποία ο αριθμητής υπολειπόταν κατά ενός του παρονομαστή (Cajori, 2007).

Οι αρχαίοι Έλληνες γράφανε, τέλος, τα κλάσματα με διάφορους τρόπους και πάντα χωρίς κλασματική γραμμή. Το κλάσμα 3/7 π.χ. ένας αρχαίος Έλληνας θα το παρίστανε ως γ΄ ζ'', ως γ΄ ζ'' ζ'' (ο παρονομαστής γραφόταν, δεξιά, μία ή δυο φορές) ή ακόμα και ως $\frac{\gamma}{\zeta}$. Ο Αρχιμήδης και ο Διόφαντος τοποθετούσαν τον παρονομαστή στη θέση του σημερινού εκθέτη δύναμης.

Ο σημερινός κοινός τρόπος γραφής των κλασματικών αριθμών είναι πρόταση των Ινδών, ήδη, από τον 7ο μ. Χ αιώνα, που τους έγραφαν, όμως, δίχως την οριζόντια κλασματική γραμμή, η οποία υπήρξε επινόηση των Αράβων, και συγκεκριμένα του al-Hassar, 6 αιώνες αργότερα.

Ο Fibonacci, πέραν της εισαγωγής του δεκαδικού συστήματος και των αραβικών αριθμών στην Ευρώπη, ήταν και ο πρώτος Ευρωπαίος που χρησιμοποίησε την κλασματική γραμμή αν και παρέκλινε από το σύγχρονο τρόπο γραφής των κλασμάτων, αφού, σε περιπτώσεις μεικτών αριθμών, τα έγραφε αριστερά των ακεραίων (Cajori, 2007).

Στα κατοπινά χρόνια, η οριζόντια γραμμή, δεν τύχαινε πλήρους και καθολικής αποδοχής από τους μαθηματικούς, καθώς αρκετοί την απέφευγαν, αλλά και από τους τυπογράφους. Οι τελευταίοι αντιστέκονταν στη χρήση της οριζόντιας γραμμής, καθότι αυτή απαιτούσε τρία κάθετα τυπογραφικά επίπεδα, μια διαδικασία δύσκολη και χρονοβόρα.

Το 1845 ο De Morgan στο άρθρο του «The Calculus of Fractions», προσέφερε «τυπογραφική» ανακούφιση και παρηγοριά, με την υιοθέτηση της διαγωνίου γραμμής, τακτική που χρησιμοποιείται και σε σημερινά κείμενα.

Μετά από αυτή τη συνοπτική, ιστορική και διαχρονική διαδρομή της κλασματικής αποτύπωσης και αναπαράστασης, είναι, «τοις πράγμασι» επιβεβλημένη και η μελέτη και ερμηνεία της διαχρονικότητας της μαθητικής δυσκολίας, ως προς την κατανόηση των κλασμάτων.

Αναφορικά δε, με την, ομολογουμένως, «ταραγμένη» και προβληματική σχέση των μαθητών ειδικά του Δημοτικού, με τους κλασματικούς αριθμούς, και τις εννοιολογικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, πολλές και διάφορες έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί και καταγραφεί. Οι κυριότερες αιτίες τής περιπετειώδους αυτής συνύπαρξης οφείλονται:

- στην περιορισμένη χρήση των κλασματικών αριθμών στην καθημερινή ζωή
- στη δυσκολία ονομασίας, σύγκρισης και διάταξης των κλασμάτων
- στην αδυναμία σύλληψης και κατανόησης του διαφορετικού ρόλου των όρων του κλάσματος και της σχέσης που τους διέπει, γεγονός που επιφέρει και λογιστική διαφοροποίηση στην πραγμάτευση και το

χειρισμό του αριθμητή και παρονομαστή, αφού θεωρούνται ως ανεξάρτητες, μεταξύ τους ποσότητες

- στη δυσχέρεια κατανόησης της ισοδυναμίας - ισότητας των κλασμάτων
- στην ύπαρξη πολλών κανόνων, κατά την εκτέλεση των 4 πράξεων της αριθμητικής (ειδικά στην πρόσθεση και αφαίρεση), μεταξύ κλασματικών αριθμών, σε σχέση, φυσικά, με τους ευκολονόητους φυσικούς αριθμούς
- στην παράξενη «κλασματική πραγματικότητα» ότι, δηλαδή, ίσα μέρη δυο διαφορετικών ποσών δεν παριστάνουν ίσες ποσότητες (Δηλαδή, για παράδειγμα, τα 3/4 του 12 είναι διαφορετικά από τα 3/4 του 20)
- στην εσφαλμένη αντίληψη περί της μη ύπαρξης άλλων κλασματικών αριθμών μεταξύ κ/μ και (κ+1)/μ
- στην κακή διδασκαλία τους (Hasemann, 1981; Nunes & Bryant, 1996; Καλδρυμίδου & Κοντοζήσης, 2003; Brizuela, 2006 ; Μαστρογιάννης & Μαλέτσκος, 2007).

Τη δυσκολία επιτείνει και η πολύμορφη παράσταση των ρητών αριθμών άλλοτε ως δεκαδικών, άλλοτε ως κλασμάτων, ως μεικτών αλλά και ως συμμιγών.

Χάριν αστεισμού, θα παρατηρούσε κάποιος ότι τα παραπάνω ενισχύει και η γνωστή ρήση του μεγάλου Γερμανού μαθηματικού Leopold Kronecker (1823-1891): «Ο Θεός δημιούργησε μόνο τους ακέραιους αριθμούς. Πάντα τα λοιπά είναι έργο του ανθρώπου», (Bell, 1995), που εφευρέθηκαν, για να «τυραννούν» παιδικές ψυχές στο σχολείο … όπως αρκετοί μαθητές διαμαρτύρονται. Ή ακόμα και η πικρή παραδοχή τής Αγκάθα Κρίστι: «Συνέχισα να κάνω αριθμητική με τον πατέρα μου, περνώντας, υπερήφανα, μέσω των κλασμάτων, στους δεκαδικούς. Έφθασα τελικά στο σημείο όπου τόσες πολλές αγελάδες έφαγαν τόσο πολύ γρασίδι, και οι δεξαμενές γέμισαν με νερό σε τόσες πολλές ώρες που το βρήκα, πράγματι, αρκετά συναρπαστικό» (Πηγή: http://math.furman.edu/~mwoodard/data.html).

Πολλοί μαθητές δεν αντιλαμβάνονται πως τα κλάσματα είναι αριθμοί, αφού τα θεωρούν, εσφαλμένα, ως μέρη, μόνο ενός σχήματος ή μιας ποσότητας, Η σχολική πρακτική, κυρίως, υπεύθυνη γι' αυτή την αρρυθμία, δεν παρέχει αρκετές νύξεις, δεδομένου ότι εργασίες με γραφικές παραστάσεις, αλγεβρικές εξισώσεις και μοτίβα αριθμών περιλαμβάνουν, συνήθως, μόνο ακέραιους αριθμούς (Amato, 2005).

Όπως σε πολλές περιοχές των μαθηματικών, παρομοίως και στα κλάσματα, η χρήση εικόνων και διαγραμμάτων ενδέχεται να καθιστά τους μαθητές ικανούς να κατανοήσουν και να συνειδητοποιήσουν διαδικασίες που σε διαφορετικές περιπτώσεις θα υπερέβαιναν τα αντιληπτικά τους, νοητικά εσκαμμένα. Έτσι, τα αναπαραστασιακά εργαλεία προβάλλουν, ίσως, ως τα πλέον κατάλληλα μέσα, για να κινηθούν οι μαθητές στο μαθησιακό τους μονόδρομο (Brizuela, 2004).

Έρευνες έχουν δείξει, βέβαια, ότι τα σχεδιαγράμματα, σε κάποιες περιπτώσεις, δεν παρέχουν τα προσδοκώμενα αποτελέσματα, αφού οι μαθητές έχουν δυσκολίες, σε κάποια από αυτά, κατά τον προσδιορισμό, λόγου χάρη, της μονάδας ειδικά, όταν τα διαγράμματα είναι περισσότερα του ενός. Για παράδειγμα, σε σχέδιο, όπου δυο ακέραιες μονάδες είναι χωρισμένες αμφότερες σε πέμπτα, με σκιασμένη την πρώτη και τα 2/5 της επόμενης, πολλοί μαθητές αποκρίνονται ότι η ολική σκίαση αντιπροσωπεύει το 7/10 και όχι το σωστό 7/5 (Amato, 2005).

Παρόλες αυτές τις ενστάσεις, έχει παρατηρηθεί, όμως, ότι τα διαγράμματα βοηθούν πολλές φορές στη λύση προβλημάτων με κλάσματα αλλά και στον έλεγχο των ορθών απαντήσεων.

Η παρούσα παρέμβαση, ενδεδυμένη με «διαθεματικό χιτώνα», επιχειρεί μια γεωγραφική προσέγγιση στους κλασματικούς αριθμούς, μέσω της μελέτης σημαιών διάφορων χωρών του κόσμου.

Η διαθεματικότητα στη διδασκαλία δίνει τη δυνατότητα εξέτασης μιας έννοιας κάτω από πολλές οπτικές γωνίες από διάφορα επιστημονικά πεδία, με αποτέλεσμα τη βαθύτερη και πολύπλευρη κατανόηση της (Παναγιωτακόπουλος & Πιερρακέας & Πιντέλας, 2005). Τα νέα Αναλυτικά προγράμματα Σπουδών, ευνοούν και προκρίνουν τη «διαθεματικότητα» ή «διεπιστημονικότητα», καλύτερα, της γνώσης καταργώντας, εν μέρει, τα διακριτά και αυτοτελή μαθήματα. Ακόμα η θεωρία των πολλαπλών τύπων νοημοσύνης τού H. Gardner (1993) έδωσε ερείσματα στη διαθεματική προσέγγιση. Με τον όρο διαθεματικότητα, αναφερόμαστε στη θεωρητική αρχή οργάνωσης του αναλυτικού προγράμματος, όπου επιχειρείται να προσεγγιστεί η γνώση ενιαιοποιημένη. Αντίθετα, ο όρος Διεπιστημονικότητα είναι ο τρόπος οργάνωσης του αναλυτικού προγράμματος, όπου διατηρούνται τα διακριτά μαθήματα, αλλά με ποικίλες τεχνικές και προσεγγίσεις, πραγματοποιούνται διασυνδέσεις και συσχετισμοί μεταξύ του περιεχομένου των διαφορετικών μαθημάτων.

Ο στόχος, λοιπόν, της διδακτικής αυτής παρέμβασης είναι διττός: Αφενός οι μαθητές να αισθανθούν πολίτες του διεθνοποιημένου κόσμου, να αναπτύξουν πανανθρώπινες αξίες να σεβαστούν πολιτισμικές και άλλες ιδιαιτερότητες, ώστε τελικά, να διαμορφώσουν θετικές στάσεις απέναντι των άλλων λαών. Αφετέρου κινούμενοι σε καθαρά μαθηματικά πλαίσια οι μαθητές να αντιληφθούν την έννοια του κλάσματος, μέσα από πειραματισμούς και διαχωρισμούς σε μέρη μιας ακέραιας ποσότητας, όπως επίσης και μέσω συσχετισμών μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων. Ακόμα να συγκρίνουν κλασματικούς αριθμούς, να τους απλοποιούν, να κατανοούν την ισοδυναμία τους αλλά και τις παρεπόμενες έννοιες του λόγου και της αναλογίας.

Η αναλογία αποτελεί δομικό λίθο και μια από της βασικότερες έννοιες των Μαθηματικών, δεδομένου ότι, για μια πλειάδα μαθηματικών εννοιών, είναι πρωταρχική έννοια και βασικό συστατικό, όπως η κλίμακα, η ομοιότητα των γεωμετρικών σχημάτων, τα ποσοστά κ.ά. (Χιονίδου-Μοσκοφόγλου & Βλάχου, 2006).

ΟΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Στις περισσότερες των περιπτώσεων οι σημαίες των κρατών του κόσμου αποτελούνται από παράλληλες, κατακόρυφες ή οριζόντιες λωρίδες ενώ σε όλες, σχεδόν, υπάρχει συγκεκριμένος λόγος μήκους-πλάτους. Οι σημαίες σχεδιάστηκαν, μέσω των πολλών εργαλείων και λειτουργιών, που παρέχει το γνωστό δυναμικό περιβάλλον Γεωμετρίας Cabri Geometry II.

Το Cabri Geometry δημιουργήθηκε από τους Jean-Marie Laborde και Frank Bellemain, στο Ινστιτούτο Πληροφορικής και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (IMAG), στο πανεπιστήμιο Joseph Fourier, της Γκρενόμπλ, στη Γαλλία, σε συνεργασία με άλλους δύο φορείς, το Εθνικό Κέντρο Επιστημονικής Έρευνας της Γαλλίας (CNRS) και την ιδιωτική επιχείρηση Texas Instruments. Η συνολική προσπάθεια ήταν υπό την αιγίδα του γαλλικού υπουργείου Παιδείας.

Το αλληλεπιδραστικό λογισμικό Cabri Geometry II εξελληνίστηκε και διανεμήθηκε για χρήση στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Το εκπαιδευτικό λογισμικό Cabri Geometry II είναι ένα δυναμικό, μαθησιακό μέσο διερευνητικής και ανακαλυπτικής προσέγγισης κατά τη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας αλλά, εν μέρει, και της άλγεβρας.

Το λογισμικό διαθέτει πλησμονή εργαλείων και λειτουργιών για την πραγματοποίηση διάφορων και ποικίλων αλληλεπιδραστικών γεωμετρικών κατασκευών και δραστηριοτήτων, τα οποία διαδραματίζουν το ρόλο των διαμεσολαβητών, εν είδει, νοητικής σκαλωσιάς, μεταξύ των γεωμετρικών και αλγεβρικών εννοιών, που ενσωματώνουν και των μαθητών.

Αποτελείται από 11 κουμπιά γεωμετρικών ενοτήτων (κατασκευές σχημάτων, μετασχηματισμοί, μετρήσεις, μορφοποιήσεις κλπ), που καθένα συνοδεύεται από ένα κυλιόμενο μενού, σχετικών λειτουργιών και κατασκευών. Μάλιστα τα εργαλεία αυτά απαιτούν σχετικά λίγο χρόνο προσαρμογής και κατανόησης του τρόπου λειτουργίας τους, ενώ προσφέρονται και για εξατομικευμένη μάθηση, αφού, μέσω αυτών, μπορεί να επιλεγεί η πλέον κατάλληλη, για κάθε μαθητή, στρατηγική λύσης. Οι μαθητές μπορούν, όχι μόνο να πειραματιστούν και να εκτελέσουν μια γεωμετρική κατασκευή, αλλά και να παρακινηθούν, να υποστηριχτούν και να επιβεβαιωθούν κατά τη διατύπωση συγκεκριμένων υποθέσεων και γενικεύσεων. Αυτό καθίσταται δυνατό, για τους μαθητές, με την ενεργοποίηση της επαγωγικής και παραγωγικής σκέψης, μέσα στο πλαίσιο ανάπτυξης της γεωμετρικής λογικής τους, σε συνδυασμό με τις προσπάθειές τους, για επινόηση μεθόδων απόδειξης αυτών των υποθέσεων και γενικεύσεών τους. Μάλιστα, η αίσθηση της γενικότητας προκαλείται από την πολλαπλότητα των σχετικών περιπτώσεων μιας δεδομένης γεωμετρικής μορφής ή σχήματος.

Το Cabri Geometry είναι ένα εξαιρετικό αλληλεπιδραστικό περιβάλλον. Οι περισσότερες ενέργειες, δε, των μαθητών ακολουθούνται από σημαντική οπτική και αριθμητική ανατροφοδότηση καθώς επίσης και από κειμενικά μηνύματα οδηγιών και διόρθωσης. Αυτές οι δυνατότητες μπορούν να παρέχουν στους μαθητές δυνατότητες ενεργητικής μάθησης, σε αντίθεση με τα παραδοσιακά ανενεργά περιβάλλοντα, όπως το περιβάλλον χαρτί-μολύβι αλλά και άλλα περιβάλλοντα, όπου χρησιμοποιούνται φυσικά αντικείμενα.

Το περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας Cabri-Geometry II παρέχει δυνατότητες κατασκευής και πραγματοποίησης μαθησιακών δραστηριοτήτων σύμφωνα με τις σύγχρονες κοινωνικές και εποικοδομιστικές θεωρήσεις για τη γνώση και τη μάθηση. Σύμφωνα με αυτές τις θεωρήσεις η μάθηση είναι μια ενεργητική, υποκειμενική και κατασκευαστική δραστηριότητα στην οποία καταλυτικό ρόλο παίζει το πλαίσιο συμφραζομένων στο οποίο πραγματοποιείται και ειδικότερα οι μαθησιακές δραστηριότητες και τα εργαλεία τα οποία παρέχονται προς χρήση στους μαθητές (Μαστρογιάννης & Κορδάκη, 2007).

Τα εποικοδομιστικά υπολογιστικά μαθησιακά περιβάλλοντα μπορούν να ενεργήσουν ως καταλύτες σε ολόκληρο το πλαίσιο μάθησης, διαδραματίζοντας έναν ουσιαστικό, κρίσιμο και εξαιρετικό ρόλο, όπως, ασφαλώς, και οι κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες μάθησης. Οι ολιστικές δραστηριότητες μάθησης μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές, ώστε να αποκτήσουν μια σφαιρική άποψη του θέματος, ενώ οι δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος μπορούν να τους ενθαρρύνουν για να κατασκευάσουν τη γνώση, ενεργά, καθώς επίσης και να αποκτήσουν ορισμένες ουσιαστικές δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων. Ακόμα το είδος των δραστηριοτήτων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να εκφράσουν τις ενδοατομικές και διατομικές του διαφορές (Kordaki & Mastrogiannis, 2006 ; Mastrogiannis & Kordaki, 2006).

Ως τα κυριότερα χαρακτηριστικά και πλεονεκτήματα του Cabri Geometry καταγράφονται, συνοπτικά, τα εξής:

- Υψηλή αλληλεπιδραστικότητα
- Φιλικότητα και ευχρηστία
- Πληθώρα εργαλείων και λειτουργιών
- Δυναμικό μαθησιακό περιβάλλον. Το περιβάλλον Cabri-Geometry II διαθέτει τη λειτουργία του «συρσίματος», μέσω του οποίου είναι δυνατός ο δυναμικός μετασχηματισμός σχημάτων, έτσι ώστε να διατηρούνται οι βασικές τους ιδιότητες. Έτσι οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να πειραματιστούν, με μια απειρία σχημάτων της ίδιας κλάσης και να διατυπώσουν υποθέσεις, για τις βασικές τους ιδιότητες.
- Οπτική, αριθμητική και κειμενική ανατροφοδότηση, με δυνατότητες αυτοδιόρθωσης
- Καταγραφή των ενεργειών των μαθητών

- Δημιουργία μακροεντολών
- Υποστήριξη διαθεματικών δραστηριοτήτων

Όλες οι σημαίες είναι κατασκευασμένες με τέτοιο τρόπο, ώστε, κάθε στιγμή, οποτεδήποτε χρειαστεί, ο χειρισμός ειδικού κουμπιού-σημείου να μεταβάλλει την αναλογία μήκους - πλάτους, αλλά και να την επαναφέρει στις σωστές και προκαθορισμένες από κάθε χώρα προδιαγραφές και διαστάσεις. Επιπλέον, επιτρέπεται η δυναμική μεταβολή κάθε σημαίας με την αλλαγή του μεγέθους της, χωρίς, όμως, ταυτόχρονη αλλαγή των επιμέρους στοιχείων της, αφού ο αρχικά επιλεγμένος λόγος παραμένει αμετάβλητος και εξακολουθεί να ισχύει. Πέραν, βέβαια, αυτών των χαρακτηριστικών οι χρωματικά πολυποίκιλες αυτές συνθέσεις, προσφέρουν και παιδαγωγικό τόνο ευθυμίας και ατμόσφαιρα μαθησιακής ευαρέσκειας, χαρακτηριστικά λίαν απαραίτητα στο χλωμό, άγευστο, απρόσωπο και εξοντωτικό, σύγχρονο Σχολείο.

Επίσης, είναι δυνατό οι μαθητές να κατασκευάσουν οι ίδιοι κάθε σημαία. Αυτή η διαδικασία απαιτεί σαφώς γεωμετρικές και τεχνολογικές γνώσεις, αλλά λειτουργεί, όμως, αντισταθμιστικά, δεδομένου ότι τα μαθησιακά οφέλη είναι κατά πολύ πλουσιότερα.

Ως μια γενική διδακτική κατεύθυνση θα μπορούσαν να τεθούν οδηγίες και ερωτήσεις όπως:

- Αναγνωρίστε και απαριθμήστε τα χρώματα
- Μεταβάλατε δυναμικά το δοσμένο λόγο και σημειώστε τις τροποποιήσεις που επιφέρει
- Σύρετε τη σημαία από (κάποια) σημεία της και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας
- Εκτιμήστε τι μέρος της σημαίας χρησιμοποιεί κάθε χρώμα.
- Κάθε λωρίδα αποτελεί κλασματική μονάδα;
- Εξηγήστε τις απαντήσεις σας
- Βρείτε τον κλασματικό αριθμό ενός μέρους (λωρίδας)
- Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μια σημαία αν ξέρουμε μόνο ένα κομμάτι της και τις σχέσεις του με τα υπόλοιπα κομμάτια- λωρίδες;
- Διατάξτε τα κλάσματα που προκύπτουν
- Εντοπίστε τα ισοδύναμα (ίσα) κλάσματα
- Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε τα εργαλεία και τις λειτουργίες του Cabri Geometry, για να επαληθεύσουμε και να επιβεβαιώσουμε τις εκτιμήσεις και τους υπολογισμούς μας;
- Τι μέρους του συνολικού εμβαδού καλύπτει κάθε λωρίδα;
- Τι μέρους του συνολικού ποσού των χρημάτων θα δαπανηθούν, για την αγορά κάθε χρωματιστής λωρίδας;
- Βρείτε τρόπους απόδειξης των ισχυρισμών σας
- Πώς σχεδιάζουμε τις σημαίες, ώστε να παραμένει, κατά τη μεταβολή τους, ο λόγος μήκους – πλάτους; (με περιστροφή κατά -90° ενός

οριζόντιου τμήματος, που σχηματίζει το δοσμένο λόγο με το συγγραμικό μήκος)

Μια από τις απλές (στο σχεδιασμό) σημαίες είναι αυτή της Ινδονησίας (Σχήμα 1) με δύο ισομεγέθεις παράλληλες λωρίδες.

***Σχήμα 1**: Σημαίες σχεδιασμένες με το Cabri*

Το 1/2 που αντιπροσωπεύει η κάθε λωρίδα μπορεί να επαληθευτεί και από (τον αυτόματο, από μια εντολή του λογισμικού) προσδιορισμό του εμβαδού της, σε σχέση με το συνολικό εμβαδό της σημαίας. Με τρεις παράλληλες λωρίδες είναι η σημαία της Ρωσίας και της Ιταλίας.

Ελαφρώς δυσκολότερες στη μελέτη τους είναι οι σημαίες της Κολομβίας και της Ταϊλάνδης δεδομένου ότι περιέχουν ανισομεγέθεις λωρίδες. Μερικές ενδεικτικές ερωτήσεις που μπορούν να τεθούν είναι:

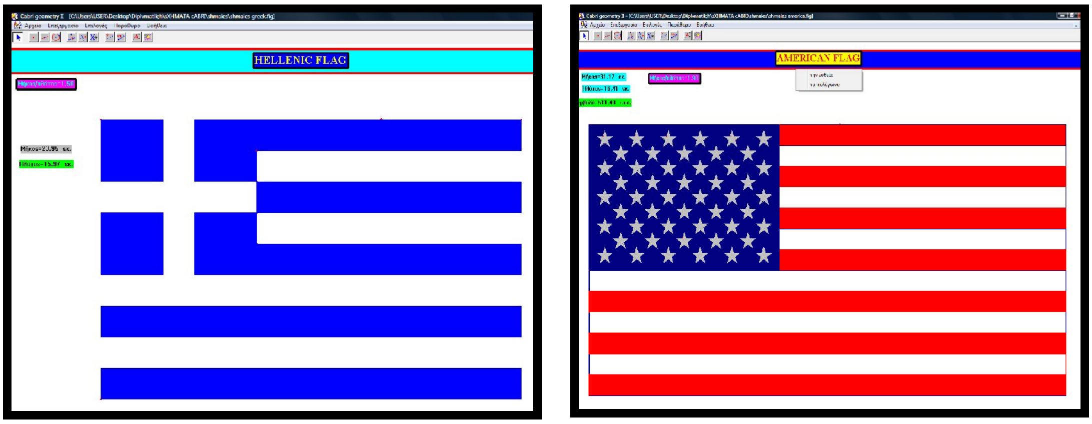
- Τι μέρος της κολομβιανής σημαίας καλύπτει η μπλε λωρίδα (το ½ του ½)
- Με τι ισούται το άθροισμα ½+¼ +¼
- Χαράξτε μια νέα λωρίδα, παραποιώντας τη σημαία, ώστε όλες οι λωρίδες να παριστάνουν ίσες κλασματικές μονάδες
- Στη σημαία της Ταϊλάνδης γράψτε με δυο διαφορετικούς κλασματικούς αριθμούς το μέρος που αντιπροσωπεύει η μπλε λωρίδα. Ποιον από τους δυο συμφέρει να προτιμούμε;

Περισσότερο απαιτητικές είναι οι σημαίες των Εμιράτων, της Μαδαγασκάρης και του Κονγκό, αφού οι κλασματικές σχέσεις (όλες οι λωρίδες της κάθε σημαίας είναι ισεμβαδικές) δεν μπορούν να επαληθευτούν, εύκολα, οπτικά. Μια λύση μπορεί, ενδεχομένως, να προέλθει από τη μέτρηση των εμβαδών των σημαιών και των λωρίδων που τις συνθέτουν και την κατοπινή διαίρεσή τους. Εδώ οι μαθητές μπορεί να διαπιστώσουν ότι διαφορετικά στη μορφή σχήματα είναι πιθανό να είναι ισεμβαδικά και να αποσαφηνίσουν τη συνεπαγωγή (και όχι ισοδυναμία), ότι, δηλαδή, τα ίσα σχήματα είναι ισεμβαδικά, χωρίς, κατ' ανάγκη, να ισχύει και το αντίστροφο.

Η σημαία της Ελβετίας είναι η μόνη με λόγο των διαστάσεων της ίσο με 1 (τετράγωνη). Η μελέτη της σημαίας αυτής προσφέρεται να δημιουργηθεί από τους ίδιους τους μαθητές, μεγάλων τάξεων, ίσως Λυκείου, λόγω των διαφορετικών αναλογιών που λαμβάνονται υπόψη, κατά τη σχεδίαση του εσωτερικού λευκού σταυρού.

Η ίδια διδακτική τακτική προτείνεται να ακολουθηθεί και στην σημαία του Μπαγκλαντές, αφού η διάμετρος του κύκλου ισούται με το 1/5 του μήκους, ενώ το κέντρο του είναι το σημείο τομής της καθέτου, που άγεται από το 9/20 μέρος του μήκους της σημαίας, και της οριζόντιας (παράλληλης προς το μήκος) γραμμής, που σύρεται από το μέσο του πλάτους του.

Τέλος οι δυο σημαίες των Ηνωμένων Πολιτειών και της Ελλάδας, θεωρούνται ως οι πλέον ιδανικές για τη μελέτη των κλασμάτων, δεδομένου ότι παρουσιάζουν συγκριτική, κλασματική ποικιλία, σε σχέση με τις υπόλοιπες (Σχήμα 2).



Σχήμα 2. *Ελληνική και αμερικανική σημαία σχεδιασμένες στο Cabri*

Η αμερικανική σημαία, ομολογουμένως, αρκετά δύσκολη στην κατασκευή της έχει αναλογία διαστάσεων 1:1,9. Αποτελείται από 13 ισομεγέθεις λωρίδες κόκκινες (7) και λευκές (6) που εναλλάσσονται. Το αριστερό μπλε ορθογώνιο έχει μήκος τα 2/5 του συνολικού και πλάτος τα 7/13 του συνολικού πλάτους της σημαίας. Το πλάτος του ορθογωνίου των αστεριών είναι χωρισμένο σε 10 τμήματα ενώ το μήκος του σε 12. Μερικές ερωτήσεις μπορούν να αφορούν στον εντοπισμό των μικρών ορθογωνίων του πλαισίου των αστεριών, ως μερών της σημαίας. Κάποιες άλλες, για παράδειγμα, στην εύρεση της κλασματικής μονάδας στο πλάτος ή στο μήκος του ορθογωνίου των άστρων. Ακόμα μια καλή μαθησιακή δραστηριότητα, ίσως, αποτελεί η διερεύνηση της δυνατότητας, ως προς τη μεταβολή του αρχικού λόγου των διαστάσεων ($\mu/\pi=1,9$), ώστε το μπλε ορθογώνιο να μετασχηματιστεί σε τετράγωνο ($2/5\mu=7/13\pi$, δηλαδή $\mu/\pi \approx 1,35$).

Κάποιες άλλες ερωτήσεις και δραστηριότητες θα αναφερθούν, ως κοινές, κατά τη μελέτη της γαλανόλευκης που, ευθύς, αμέσως …αναρτάται.

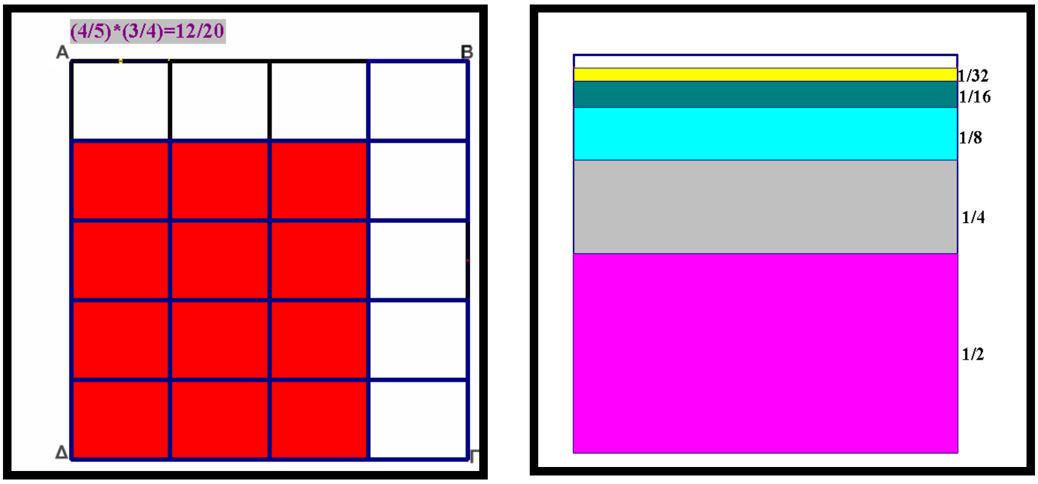
Και κατακλείδα, ας αποτελέσει, λοιπόν, το εθνικό μας σύμβολο το οποίο υιοθετήθηκε επίσημα ως τέτοιο, το 1978. Η ελληνική σημαία αποτελείται από 9 ίσες, οριζόντιες ρίγες, 5 μπλε οι οποίες εναλλάσσονται με τις υπόλοιπες 4 λευκές. Οι 9 λωρίδες αντιπροσωπεύουν τις ισάριθμες συλλαβές της φράσης «Ελευθερία ή Θάνατος» ή ίσως, τις εννέα Μούσες, κατά μιαν άλλη εκδοχή. Ο επίσημος λόγος των διαστάσεών της είναι 2:3.

Αν υποθέσουμε ότι το πλάτος κάθε ρίγας είναι τα 2/18 του συνολικού πλάτους της σημαίας, και ότι το μήκος της είναι 27/27, τότε το μπλε αριστερό τετράγωνο έχει διαστάσεις 10/18 του πλάτους και 10/27 του μήκους. Οι ποσότητες που παριστάνουν αυτά τα διαφορετικά κλάσματα είναι (παραδόξως, ίσως, για πολλούς μαθητές) ίσες μεταξύ, τους αφού 10/18·2/3=20/54=10/27. Το καθένα τετράγωνο του σταυρού έχει διαστάσεις 4/18 του πλάτους και 4/27 του μήκους, ενώ ο λευκός σταυρός αποτελείται από 2 ίσες κάθετες ρίγες διαστάσεων 2/27 του μήκους και 10//18 του πλάτους η μία, και 2/18 του πλάτους και 4/27 του μήκους, η άλλη.

Μερικές ενδεικτικές ερωτήσεις θα μπορούσε να ήταν οι ακόλουθες:

- Πόσες λωρίδες συνθέτουν τη ελληνική σημαία;
- Η κάθε ρίγα ποιο μέρος ολόκληρης της σημαίας αντιπροσωπεύει;
- Το μπλε τετράγωνο τι τμήμα ολόκληρης της σημαίας αντιπροσωπεύει;
- Οι λωρίδες που εκτείνονται μετά το μπλε τετράγωνο του σταυρού, τι μέρος ολόκληρων των λωρίδων αντιπροσωπεύουν;
- Δικαιολογήστε, γιατί διαφορετικά κλάσματα μπορούν να παριστάνουν ίσες ποσότητες
- Αν το μικρό μπλε τετράγωνο του σταυρού θεωρηθεί μονάδα μέτρησης, τότε ποιο το εμβαδόν της σημαίας;
- Μετασχηματίστε δυναμικά τη σημαία, ούτως ώστε το ¼ του μικρού μπλε τετραγώνου να χωρά τόσες φορές στη σημαία, όσες φανερώνει ο αριθμός του εμβαδού που εικονίζεται στην οθόνη.

Ως εμπέδωση στη μελέτη των κλασμάτων προσφέρεται και η γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου 2 κλασματικών αριθμών (Μέγας, 1982) αλλά και η «οπτική απόδειξη» ακόμα, ίσως και σε μαθητές του Δημοτικού Σχολείου, του αθροίσματος των απείρων όρων της γνωστής φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με α΄ όρο 1/2 και λόγο 1/2, δηλαδή της σχέσης S=1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+… $= \frac{1/2}{1-1/2} = 1$, όπως παρουσιάζονται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3. *Ερμηνείες και αποδείξεις, μέσω κλασμάτων, στο περιβάλλον του Cabri*

Στην πρώτη περίπτωση, εντός του περιβάλλοντος του Cabri Geometry II, το τετράγωνο ΑΒΓΔ διαιρείται κατά μήκος σε 4 τμήματα και κατά πλάτος σε 5. Προκύπτουν έτσι 20 ισεμβαδικά και ίσα ορθογώνια, εμβαδού, το καθένα, 1/20 του αρχικού τετραγώνου. Το κόκκινο ορθογώνιο έχει μήκος 3/4 και πλάτος 4/5. Το εμβαδόν του, φυσικά, ισούται με 12/20 του αρχικού τετραγώνου, ως το αποτέλεσμα του γινομένου των διαστάσεών του (3/4·4/5=12/20).

Στη δεύτερη παραδειγματική περίπτωση δεν απαιτούνται μαθηματικοί τύποι. Τα «οπτικά μαθηματικά» προσφέρουν αρκετά αξιόλογα εφόδια για την επίλυση (Λιπορδέζης & Λυγερός & Φωτιάδης, 2008). Η πλευρά ενός τετραγώνου, με συνεχή χρήση της εντολής του λογισμικού «μέσον», χωρίζεται στις κλασματικές μονάδες, όπως εμφανίζονται στο σχήμα 3 και απαιτεί η σχέση S. Μέσω αυτής της επαναληπτικής διαδικασίας, η λύση, μάλλον, καθίσταται προφανής.

Κατά τον Ν. Λυγερό, Έλληνα ερευνητή και επισκέπτη καθηγητή σε αρκετά ελληνικά Πανεπιστήμια, ο οποίος κατέχει έναν από τους υψηλότερους δείκτες ευφυΐας στην κλίμακα Stanford-Binet, με 189 βαθμούς «δεν είναι μαθηματικά αυτά που μαθαίνουν τα παιδιά στα σχολεία, στην καλύτερη περίπτωση είναι λογιστική. Δεν καθοδηγούμε τα παιδιά να μάθουν τι είναι η ομορφιά των μαθηματικών, η δύναμη των μαθηματικών, τα οπτικά μαθηματικά» (Από τον ιστότοπο: www.lygeros.org/Interviews/kathimerini_gr_20060914a.htm).

Στα γνωστικά μαθηματικά ανήκουν και τα οπτικά μαθηματικά, διότι ακολουθούν τα ίδια νοητικά σχήματα σε τομείς που είναι περιορισμένοι στο οπτικό. Η εισαγωγή εργαλείων, όπως είναι ο υπολογιστής, για την πραγματοποίηση αυτών των νοητικών σχημάτων αποτελεί μονοδρομική αναγκαιότητα, ώστε τα μαθηματικά, ακόμα και αν είναι ισχυρές αφαιρετικές δομές, να καταστούν πιο προσιτά και ελκυστικά στο μαθητή. Μέσω της οπτικοποίησης, οι μαθητές αντιλαμβάνονται και κατανοούν καλύτερα τις έννοιες των μαθηματικών, εισχωρώντας άμεσα και πρακτικά στον κόσμο των οπτικών μαθηματικών, τα οποία είναι ικανά να αλλάζουν τον τρόπο σκέψης, αφού οι μαθητές δε βλέπουν πια μόνο ό,τι καταλαβαίνουν (Λυγερός, 2005).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα παρέμβαση παρουσιάστηκε μια διαθεματική πρόταση μελέτης κλασματικών αριθμών, μέσω σημαιών, διαφόρων κρατών. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να παράσχει μαθησιακά ευεργετήματα, δεδομένου ότι οι περισσότερες σημαίες του κόσμου αποτελούνται από παράλληλες ρίγες. Μάλιστα μπορεί να αξιοποιηθούν οι δυο από τις τρείς κατηγορίες μοντέλων για τα κλάσματα: α) Τα μοντέλα περιοχής ή εμβαδού, όπου μια επιφάνεια διαιρείται σε μικρότερα μέρη. Το μοντέλο, αυτό κατά κόρον, χρησιμοποιήθηκε, κατά την πραγμάτευση των σημαιών και β) το μοντέλο μήκους ή μέτρησης, στο οποίο συγκρίνονται μήκη. Στο τρίτο μοντέλο τα κλάσματα αναπαρίστανται ως μέρη συνόλων (van de Walle, 2005). Επιπλέον οι μαθητές πέραν, όλων των άλλων, μπορούν να ασχοληθούν με το θεώρημα του Θαλή, κατά το χωρισμό ενός τμήματος σε ίσα μέρη, με αναλογίες, με στρογγυλοποίησες αριθμών, με μετρήσεις, με την καθετότητα και την παραλληλία αλλά και με αρκετές άλλες γεωμετρικές και αλγεβρικές έννοιες.

Τέλος ως ένα πλεονέκτημα, μάλλον, καταγράφεται ο αβίαστος και αυθόρμητος τρόπος εξοικείωσης, με ένα μεγάλο ποσοστό των μενού και των λειτουργιών του Cabri Geometry II.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Amato, S. A. (2005), Developing students' understanding of the concept of fractions as numbers, *In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 49-56. Melbourne: 2005
2. Bell, E.T. (1995), *Οι μαθηματικοί,* Τόμος Ι, Παν/κές Εκδόσεις Κρήτης
3. Brizuela, B. (2004), *Mathematical Development in young children, Exploring Notations*, Teachers College Press, New York
4. Brizuela, B. (2006), Young children's notations for fractions, *Educational Studies in Mathematics*: Volume 62, Number 3
5. Cajori, F. (2007), *A History of Mathematical Notations*: Vol. I and II, Cosimo Classics, New York
6. Gardner, H. (1993), *Multiple intelligences: The theory in practice*. New York: Basic Books
7. Hasemann, K. (1981), On difficulties with fractions, *Educational Studies in Mathematics*: Volume 12, Number 1
8. Kordaki, M. & Mastrogiannis, A. (2006), The potential of multiple solution tasks in e-learning environments: Exploiting the tools of Cabri Geometry II. *In T. Reeves & S. Yamashita (Eds), Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare &*

Higher Education (E-Learn 2006), October, 13-17, Honolulu, Hawaii, USA, (pp.97-104), Chesapeake

9. Mastrogiannis, A. & Kordaki, M. (2006), The concept of similarity in triangles within the context of tools of Cabri-Geometry II, *In Proceedings of m-ICTE 2006,* November, 22-25, Seville, Spain (pp 641-645)
10. Nunes, T. & Bryant, P. (1996), *Children Doing Mathematics*, Oxford: Blackwell
11. Van de Walle, J. (2005), *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διδασκαλία,* Αθήνα: Τυποθήτω
12. Καλδρυμίδου, Μ. & Κοντοζήσης, Δ. (2003), Εικονικές Αναπαραστάσεις και εννοιολογική προσέγγιση των κλασματικών εννοιών: Η έννοια του μισού στα νήπια. *Λευκωσία: Στο «Οι αναπαραστάσεις και τα Γεωμετρικά Μοντέλα στη μάθηση των μαθηματικών»* Επιμ: Γαγάτσης - Ηλία
13. Λιπορδέζης, Σ. & Λυγερός, Ν. & Φωτιάδης, Ν. (2008), *Μαθηματικές Προκλήσεις*, Εκδόσεις Αρχιμήδης
14. Λυγερός, Ν. (2005), Οπτικά Μαθηματικά, *22ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με θέμα: "Οι Σύγχρονες Εφαρμογές των Μαθηματικών και η Αξιοποίησή τους στην Εκπαίδευση*, Λαμία, 18-20 Νοεμβρίου 2005
15. Μαστρογιάννης, Α. & Κορδάκη, Μ. (2007), Δυναμικά περιβάλλοντα γεωμετρίας και η έννοια της Συμμετρίας στο Δημοτικό σχολείο. *4ο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΕΕΠ-ΔΤΠΕ με θέμα: «Τ.Π.Ε. & Εκπαίδευση». Διοργάνωση: ΕΕΕΠ-ΔΤΠΕ (Επιστημονική Ένωση Εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας για τη διάδοση των ΤΠΕ στην εκπαίδευση)*, Πειραιάς, 6-7 Οκτωβρίου 2007
16. Μαστρογιάννης, Α. & Μαλέτσκος Α. (2007), Η Γνωστική Επιστήμη, οι μαθητές Δημοτικού και τα κλάσματα. *Συνέδριο Παν/μίου Ιωαννίνων με τίτλο: «Η Πρωτοβάθμια εκπαίδευση και οι προκλήσεις της εποχής μας»,* Ιωάννινα 17 - 20 Μαΐου 2007
17. Μέγας, Π. (1981) Θεωρητική και Εφαρμοσμένη Αριθμητική. Αθήνα: Πνευματικός
18. Παναγιωτακόπουλος, Χ. & Πιερρακέας, Π. & Πιντέλας, Π. (2005), *Σχεδίαση Εκπ/κού Λογισμικού*, Πάτρα: ΕΑΠ
19. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ. & Βλάχου, Ρ. (2006), *Η χρήση του εκπαιδευτικού λογισμικού των μαθηματικών του παιδαγωγικού ινστιτούτου για τη διδασκαλία των λόγων και αναλογιών στη Στ΄ Δημοτικού*. Πανεπιστήμιο Αιγαίου-ΠΤΔΕ