«Η κληρονομιά δύο αδελφών ή Το ορισμένο ολοκλήρωμα με τις Τ.Π.Ε.»

Μπουζάλης Μιχαήλ
Επιμορφωτής Β! Επιπέδου – Μαθηματικός – 1ο Γυμνάσιο Χαριλάου Θεσ/νίκης
mbouzalis@sch.gr

Ωρολογάς Νίκος
Επιμορφωτής Β! Επιπέδου – Μαθηματικός – 1ο Γυμνάσιο Περαίας
orologasn@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

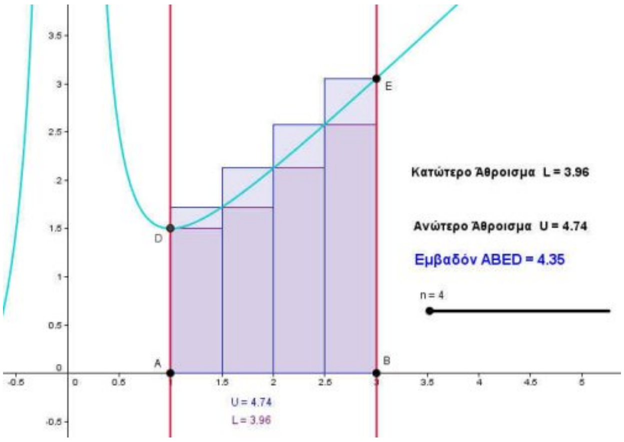
Η ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Από την αρχαιότητα ακόμα την ανθρωπότητα την απασχόλησε η εύρεση και ο υπολογισμός των εμβαδών επιπέδων σχημάτων που δεν υπάκουαν σε ακριβή γεωμετρικά μοντέλα. Ο Αρχιμήδης με τη δική του μέθοδο της εξάντλησης προσπάθησε να δώσει λύση σε κάποια από αυτά. Το παρακάτω σενάριο φιλοδοξεί να βοηθήσει ακριβώς στην εύρεση του εμβαδού τέτοιων επιπέδων σχημάτων. Συγκεκριμένα απευθύνεται στους μαθητές και τις μαθήτριες της Γ! Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης και τους βοηθάει να υπολογίσουν το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται μεταξύ των τριών ευθυγράμμων πλευρών τετραπλεύρου του οποίου η τέταρτη πλευρά είναι κοίλο μέρος καμπύλης , το εμβαδόν τριγώνου που έχει δύο ευθύγραμμες πλευρές και την τρίτη καμπύλη καθώς και οριακές μεταβολές αυτών.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Ορισμένο ολοκλήρωμα, Βιβλιογραφία*

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δύο αδέλφια κληρονομούν από τον πατέρα τους ένα χωράφι. Έχουν μπροστά τους το τοπογραφικό διάγραμμα όπου φαίνεται ότι οι τρεις πλευρές του είναι ευθείες, αλλά η τέταρτη είναι καμπύλη που προήλθε από ένα νεροφάγωμα. Αφού μετρήσουν το χωράφι, για να βρουν με ακρίβεια το μέγεθός του, θέλουν να το χωρίσουν σε δύο μέρη με διάφορους τρόπους έτσι ώστε να πάρουν τα ίδια μέτρα γης. Σκέφτονται πρώτα να το χωρίσουν με κατακόρυφη ευθεία ή με πλάγια ευθεία σε δύο ισοδύναμα μέρη. Υπάρχει η σκέψη να φέρουν μια οριζόντια και μια κατακόρυφη ευθεία, ώστε να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο οικόπεδο. Αυτό θα το δωρίσουν στην κοινότητα, για να γίνει σχολείο, αλλά θέλουν τα δυο κομμάτια που θα μείνουν να έχουν το ίδιο εμβαδόν. Επειδή δίπλα από το χωράφι περνάει ένας χείμαρρος (όπως φαίνεται στο παρακάτω τοπογραφικό ο χείμαρρος βρίσκεται στα αριστερά κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα) και τρώει σιγά - σιγά την μία μεριά του, υπάρχει η ανάγκη μιας διαρκούς αναζήτησης των νέων ορίων και του εκ νέου καθορισμού της μοιρασιάς. Μπορείτε να βοηθήσετε τα δύο αδέλφια να λύσουν το πρόβλημα που τους απασχολεί;



ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η γένεση των πρώτων εννοιών της Γεωμετρίας είναι μια διαδικασία που κράτησε πολλούς αιώνες. Η διαμόρφωσή τους ήταν αποτέλεσμα νοητικής αφαίρεσης όλων των άλλων ιδιοτήτων και σχέσεων των αντικειμένων του κόσμου που μας περιβάλλει, εκτός από τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης και του μεγέθους. Στη διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών, αποφασιστικής σημασίας πρέπει να ήταν η προσπάθεια απεικόνισης των γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων με ζωγραφικές παραστάσεις, που λειτουργούσαν ως μοντέλα των πραγματικών αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή όμως δεν μπορεί να χρονολογηθεί ιστορικά.

Οι πρώτες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων ανάγονται στην Τρίτη με Δεύτερη χιλιετηρίδα π.Χ. και προέρχονται από τους λαούς της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Οι γεωμετρικές γνώσεις των λαών αυτών συνίστανται, κατά κύριο λόγο, στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων ακολουθώντας μια «αλγοριθμική» διαδικασία που εφαρμόζονταν για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Μια εμπειρική εν πολλοίς διαδικασία. Αυτή η μορφή της γεωμετρίας διήρκησε πολλούς αιώνες χωρίς να σημειωθεί αισθητή πρόοδος.

Μία νέα περίοδος εγκαινιάζεται στην αρχαία Ελλάδα, όπου η γεωμετρία μετασχηματίζεται σε αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη. Εμφανίζεται η έννοια της λογικής απόδειξης που λειτουργεί ως μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας της γεωμετρικής πρότασης, αλλά και ως στοιχείο που συστηματοποιεί τις γεωμετρικές γνώσεις. Έτσι εμφανίζονται οι πρώτες συστηματικές γεωμετρικές πραγματείες, όπως του Ιπποκράτη του Χίου περί το 440 π.Χ. και τα στοιχεία του Ευκλείδη, που αποτέλεσαν το επιστέγασμα της αρχαίας Ελληνικής Μαθηματικής παράδοσης, αλλά και πρότυπο επιστημονικού ιδεώδους για πολλούς αιώνες. Η γεωμετρία μεταμορφώνεται σε επιστήμη που μελετά αφηρημένα νοητικά αντικείμενα, οι σχέσεις των οποίων αποδεικνύονται με τη βοήθεια μιας λογικής ακολουθίας προτάσεων, ξεκινώντας από ορισμένες προϋποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη.

Την Ελληνιστική εποχή αναπτύσσονται θεμελιακά νέες μέθοδοι υπολογισμού επιφανειών και όγκων π.χ. η περίφημη μέθοδος της εξάντλησης στα έργα του Αρχιμήδη, που στηρίζονται σε αφηρημένες θεωρητικές προσεγγίσεις και βαθιές μαθηματικές θεωρίες. Εμφανίζονται αφηρημένες έννοιες για νέα γεωμετρικά αντικείμενα, η δυνατότητα εφαρμογής των οποίων θα διευκρινιστεί πολλούς αιώνες μετά, όπως η θεωρία των κωνικών τομών του Απολλώνιου, που θα βρει εφαρμογή στην φυσική μόλις τον 17ο αιώνα.

Η ευρωπαϊκή αναγέννηση οδήγησε σε νέα άνθηση τη γεωμετρία. Ένα νέο βήμα πραγματοποιήθηκε με την εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων από το Ντεκάρτ και έτσι πραγματοποιήθηκε η σύνθεση και ο μετασχηματισμός της γεωμετρίας σε αναλυτική γεωμετρία, μια γεωμετρία που μελετά τα γεωμετρικά σχήματα με αλγεβρικές μεθόδους. Προέκυψε έτσι αυτό που σήμερα ονομάζεται Αναλυτική Γεωμετρία.

Η εφαρμογή των νέων μεθόδων του διαφορικού λογισμού στην Αναλυτική Γεωμετρία οδήγησε στον πολλαπλασιασμό των κλάδων της. Το 18ο αιώνα διαμορφώνεται η Διαφορική Γεωμετρία στα έργα των Euler και Mons με αντικείμενο της αρχικά οποιαδήποτε λεία καμπύλη και επιφάνεια και ο μετασχηματισμός της. Στα μέσα του 17ου αιώνα αναπτύσσεται και η προβολική γεωμετρία από τους Ντεζάργκ και Πασκάλ. Το αντικείμενο του νέου κλάδου επικεντρώνεται από τον Πονσελέ (1822) στη μελέτη των ιδιοτήτων των επιπέδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από το ένα επίπεδο σε άλλο, ενώ η καθεαυτό θεωρία της γεωμετρικής απεικόνισης οδήγησε στο σύστημα της παραστατικής γεωμετρίας του Mons.

Σε όλους τους παραπάνω κλάδους οι θεμελιακές έννοιες και αξιώματα παραμένουν σχεδόν τα ίδια από την εποχή της αρχαίας Ελλάδος. Ριζική ανατροπή της εικόνας αυτής παρουσιάζεται στις αρχές του 19ου αιώνα με την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας από το Ν. Λομπατσέφσκι (1829) και το Γ. Μπολυάϊ (1832). Η νέα περίοδος χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη νέων γεωμετρικών θεωριών, την αλλαγή του αντικειμένου της γεωμετρίας και το διαχωρισμό του γεωμετρικού από το πραγματικό χώρο. Η νέα έννοια του γενικευμένου μαθηματικού χώρου διατυπώνεται από το Riemann το 1854 και οδήγησε στη δημιουργία της «Ρημάνιας» γεωμετρίας, η οποία βρίσκει εφαρμογή στη θεωρία της σχετικότητας και στον ολοκληρωτικό λογισμό.

ΕΜΠΛΕΚΟΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ – ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

Οι βασικές γνωστικές περιοχές που αφορούν την υλοποίηση του σεναρίου είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων του επιπέδου, οι συναρτήσεις, ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός. Δίνεται έμφαση στον υπολογισμό ορισμένου ολοκληρώματος με τη χρήση του ορισμού, άνω και κάτω άθροισμα και στα ισεμβαδικά σχήματα που δεν υπακούουν σε μαθηματικά μοντέλα της

Ευκλείδειας γεωμετρίας. Μπορούν επίσης να γίνουν επεκτάσεις στον υπολογισμό εμβαδόν που βρίσκονται μεταξύ τριών ή περισσοτέρων συναρτήσεων ή τυχαίων μορφών συναρτήσεων.

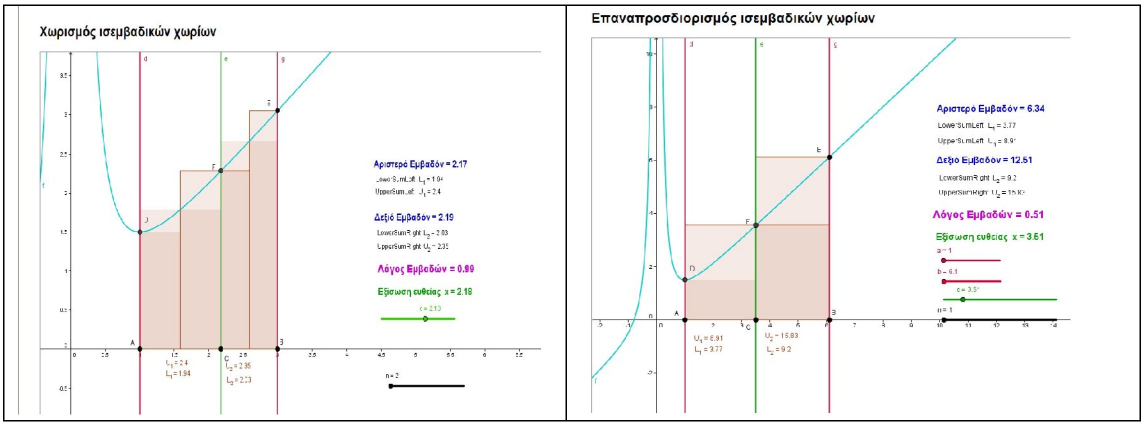
ΤΑΞΗ ΣΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΑΠΕΥΘΥΝΕΤΑΙ – ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΔΥΣΚΟΛΙΩΝ

Το σενάριο απευθύνεται στην τελευταία τάξη του λυκείου στα μαθηματικά κατεύθυνσης. Κατά την διαπραγμάτευση του σεναρίου με το φύλλο εργασίας προβλέπεται να εμφανιστούν δυσκολίες στα εξής σημεία:

- Κατά την παραδοσιακή επίλυση του προβλήματος στα ΒΗΜΑΤΑ 2 και 4 προκύπτει εξίσωση τρίτου βαθμού και η προσπάθεια λύσης της θα οδηγήσει σε αδιέξοδο τους μαθητές. Αυτό έγινε για να φανούν οι δυνατότητες των νέων μαθηματικών εργαλείων.
- Κατά τον χειρισμό των δρομέων ίσως δυσκολευτούν λίγο οι μαθητές να βρουν την ακριβή τιμή που δίνει λόγο εμβαδών ίσο με μονάδα. Θα πρέπει το πλήθος των διαμερίσεων να είναι μέγιστο και βέβαια υπάρχει η δυνατότητα (με δεξί κλικ στον δρομέα) να ορίσουμε ένα μικρότερο εύρος τιμών ώστε να αυξηθεί η ακρίβεια στο χειρισμό του δρομέα.

ΓΙΑΤΙ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΕΙ Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗΣ - ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΚΕΡΔΗ ΚΑΙ ΖΗΜΙΕΣ

Στο σενάριο μας ο υπολογιστής μας βοηθά στην εικονοποίηση του προβλήματος. Μας προσφέρει οικονομία χρόνου και ακρίβεια. Μας λύνει αλγεβρικές εξισώσεις των οποίων οι ρίζες στο χαρτί βρίσκονται μόνο με προσέγγιση. Μας δίνει την δυνατότητα να εξηγήσουμε δυναμικά το κάτω και το άνω άθροισμα του ολοκληρώματος και να καταδείξουμε ότι το εμβαδόν είναι το κοινό τους όριο. Τέλος να μας βοηθά να ξεκαθαρίσουμε έννοιες ορίου, όταν η μεταβλητή τείνει προς αριθμό ή προς το άπειρο. Ο μαθητής και η μαθήτρια μπορούν να οπτικοποιήσουν μια σχέση και ένα πρόβλημα, να δουλέψουν με κινούμενα γραφικά και να δουν τις δυναμικές μεταβολές του εμβαδού. Να κατανοήσουν πλήρως και να περιγράψουν την κατά Riemann προσέγγιση του ορισμένου ολοκληρώματος. Να χρησιμοποιήσουν δυναμικό και όχι μόνο υπολογισμό του εμβαδού οποιουδήποτε επιπέδου χωρίου ακόμα και σε οποιαδήποτε νέα μεταβολή του. Να χωρίσουν το προς εξέταση επίπεδο χωρίο σε ίσα μέρη και να διερευνήσουν τη λύση του προβλήματος αυτού.



ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ

Δεν προβλέπεται ιδιαίτερος διδακτικός θόρυβος, γιατί η παρουσίαση του μαθήματος με την βοήθεια των υπολογιστών είναι πολύ ελκυστικός τρόπος μάθησης για τους μαθητές και τις μαθήτριες.

ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

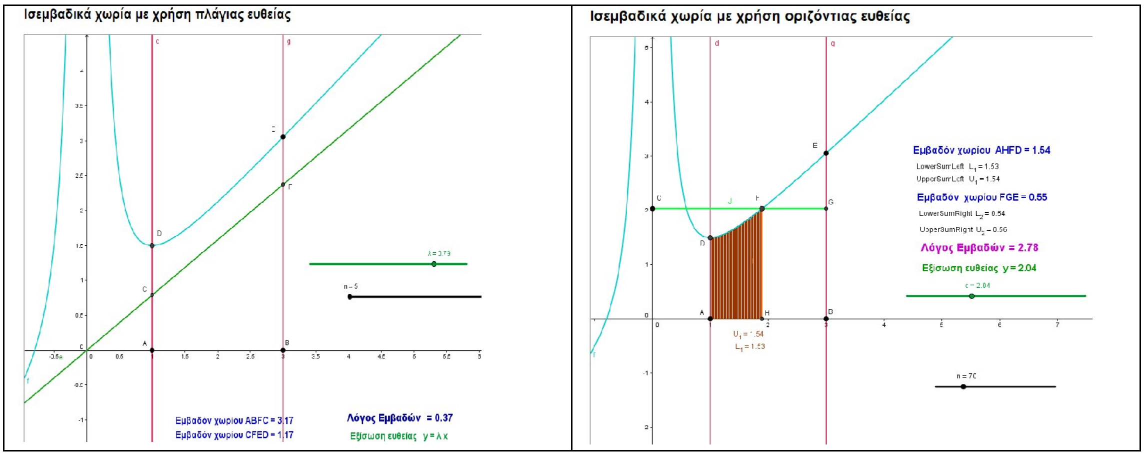
Αυτές επιτυγχάνονται με τα αλγεβρικά αποτελέσματα που δίνονται σε ξεχωριστό μέρος της επιφάνειας εργασίας, με την γραφική παράσταση του προβλήματος, με τα κινούμενα γραφικά.

ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΘΗΣΗΣ

Με την βοήθεια του σχήματος και των εργαλείων που δίνονται ο μαθητής και η μαθήτρια εικάζουν , ανακαλύπτουν και οικοδομούν την νέα γνώση λύνοντας το πρόβλημα του σεναρίου.

ΜΙΚΡΟΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΣΤΗΝ ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΝΟΗΜΑ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Μερική ανατροπή του παραδοσιακού μοντέλου μάθησης. Ο μαθητής και η μαθήτρια πρώτα παρατηρούν με την βοήθεια της προσομοίωσης και του δυναμικού της περιβάλλοντος , στην συνέχεια εικάζουν για τη πιθανή λύση διερευνώντας το πρόβλημα , πείθονται για αυτήν και στη συνέχεια την αναζητούν και την επιβεβαιώνουν στο τετράδιο τους.



ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΥΜΒΟΛΑΙΟ

Γίνεται εν μέρη ρήξη του διδακτικού συμβολαίου αφού γίνεται μερική ανατροπή της παραδοσιακής μορφής της αποδεικτικής διαδικασίας. Χρήση της διαίσθησης, δυναμική διερεύνηση , ανακάλυψη της πιθανής λύσης και κατόπιν αποδεικτική επιβεβαίωση της.

ΣΥΜΒΑΤΟΤΗΤΑ ΜΕ ΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Το θέμα που διαπραγματεύεται το σενάριο είναι πλήρως συμβατό με το αναλυτικό πρόγραμμα της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ΄Λυκείου και αποτελεί μια πολύ καλή επανάληψη όλων των εννοιών του ολοκληρωτικού λογισμού και μερική επανάληψη των ορίων.

ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΗ ΥΛΙΚΟΤΕΧΝΙΚΗ ΥΠΟΔΟΜΗ

Απαιτείται η ύπαρξη στο εργαστήριο πληροφορικής τουλάχιστον δέκα υπολογιστών. Στους υπολογιστές θα εγκατασταθεί το πρόγραμμα της geogebra που είναι ανοικτού κώδικα και εξελληνισμένο, επομένως δεν απαιτείται οποιαδήποτε παροχή δικαιώματος χρήσης. Επιπλέον πρέπει στους υπολογιστές να είναι εγκατεστημένη η γλώσσα Java σε όσο το δυνατόν νεώτερη έκδοσή της.

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ:

Οι μαθητές και οι μαθήτριες πρέπει να γνωρίζουν τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος καθώς και τον τρόπο υπολογισμού του. Επίσης τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού μεικτόγραμμου επίπεδου χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων.

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ:

Δεν απαιτούνται γνώσεις του λογισμικού ή άλλες τεχνικές δεξιότητες, αφού δίνονται τα σχήματα έτοιμα στο μαθητή. Ωστόσο στα πλαίσια της διάδοσης των Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση θα ήταν χρήσιμο οι μαθητές να διδαχθούν το λογισμικό geogebra είτε σταδιακά μέσα στα πλαίσια του καθημερινού προγράμματος.

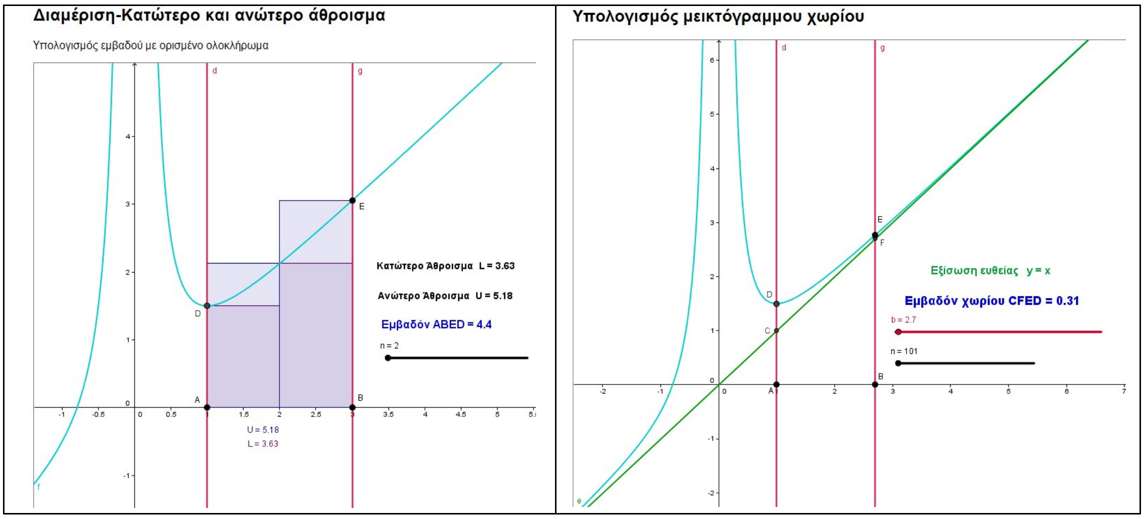
ΣΤΟΧΟΙ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι μαθητές και οι μαθήτριες μέσα από το φύλλο εργασίας θα υλοποιήσουν τους εξής στόχους :

- Την «εικονοποίηση» προβλήματος υπολογισμού εμβαδού και τη δυναμική του αναπαράσταση. Υπολογισμός ορίων (κοινό όριο του κάτω και του άνω αθροίσματος, ισεμβαδικά χωρία , όρια όταν το x τείνει στο άπειρο ή σε αριθμό κ.τ.λ.)
- Η επανάληψη του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος και η διαπίστωση ότι είναι δυνατός ο χωρισμός οποιασδήποτε επιφάνειας σε δύο ισεμβαδικά μέρη με διάφορες ευθείες του επιπέδου. Ο εκ νέου χωρισμός σε ισοδύναμα μέρη.
- Το όριο ενός επιπέδου χωρίου μπορεί να τείνει σε συγκεκριμένο αριθμό ή στο άπειρο, όταν η μεταβλητή τείνει στο άπειρο ή σε συγκεκριμένο αριθμό.

ΕΚΤΙΜΩΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΩΣΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Η προτεινόμενη διάρκεια του σεναρίου είναι τρείς διδακτικές ώρες. Ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα να επεκτείνει ή να περιορίσει τις ώρες εφαρμογής του σεναρίου ανάλογα με το πόσα αρχεία του geogebra θα παρουσιάσει στην τάξη.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων θα γίνει σε δύο φάσεις.

Πρώτη φάση

- Ενημέρωση των μαθητών και των μαθητριών για τις γενικές γραμμές του σεναρίου και του προβληματισμού που πρόκειται να τους απασχολήσει.
- Διανομή σε όλους του φύλλου εργασίας και επεξηγήσεις πάνω σε αυτό.

Εκτέλεση:

Γενικά ακολουθούνται τα βήματα του φύλλου εργασίας όπου υπάρχουν ερωτήματα και χώρος για τη λύση των ασκήσεων και καταγραφή των συμπερασμάτων.

ΒΗΜΑ 1:

Οι μαθητές και οι μαθήτριες υπολογίζουν με τη βοήθεια του Geogebra το εμβαδόν ενός επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x΄x τις κατακόρυφες ευθείες x = 1, x = 3 και τη γραφική παράσταση της $f(x)= x + \dfrac{1}{2x^2}$.

Βλέπουν στην πράξη τι σημαίνει ανώτερο και κατώτερο άθροισμα και υπολογίζουν το ολοκλήρωμα με τη βοήθεια του ορισμού. Παράλληλα υπολογίζουν το εμβαδόν και με τον παραδοσιακό τρόπο και συγκρίνουν τα αποτελέσματα των δύο τρόπων λύσης.

ΒΗΜΑ 2

Οι μαθητές και οι μαθήτριες επιχειρούν να χωρίσουν με κατακόρυφη ευθεία το χωρίο σε δύο ισοδύναμα μέρη και διαπιστώνουν ότι με το χέρι καταλήγουν σε εξίσωση τρίτου βαθμού τις οποίας οι ρίζες βρίσκονται μόνο προσεγγιστικά με την κλασσική άλγεβρα , ενώ με το Geogebra βρίσκεται ακριβής λύση. Διαπιστώνουν έτσι την ισχύ και τη χρησιμότητα των μαθηματικών εργαλείων.

ΒΗΜΑ 3

Οι μαθητές και οι μαθήτριες με τη βοήθεια μιας ευθείας $y = \lambda x$, $\lambda > 0$ χωρίζουν το χωρίο σε δύο ισοδύναμα μέρη. Αυτό το κάνουν και με τον κλασικό τρόπο και συγκρίνουν τα δύο αποτελέσματα.

Δεύτερη φάση

ΒΗΜΑ 4

Οι μαθητές και οι μαθήτριες με οριζόντια και με κατακόρυφη ευθεία χωρίζουν το χωρίο σε ένα ορθογώνιο και δύο άλλα ισοδύναμα μέρη. Αυτό γίνεται με το Geogebra, αλλά διαπιστώνουν ότι δεν μπορεί να γίνει με τον παραδοσιακό τρόπο.

ΒΗΜΑ 5

Οι μαθητές και οι μαθήτριες με το ίδιο σχήμα διαπιστώνουν ότι, αν και το δεξιό άκρο τείνει στο άπειρο, το εμβαδόν κάποιου χωρίου φαίνεται με το Geogebra ότι είναι πεπερασμένο, κάτι που επαληθεύεται στη συνέχεια υπολογίζοντας παραδοσιακά το όριο. Εδώ φαίνεται πως το λογισμικό μπορεί να δώσει αφορμή για εικασίες που επαληθεύονται στη συνέχεια με τα παραδοσιακά μαθηματικά.

ΒΗΜΑ 6

Οι μαθητές και οι μαθήτριες και με το ίδιο σχήμα διαπιστώνουν ότι, όταν το αριστερό άκρο τείνει στο μηδέν, το εμβαδόν κάποιου χωρίου φαίνεται ότι δεν είναι πεπερασμένο κάτι που επαληθεύεται και με το χέρι. Αυτό δίνει αφορμή για συζήτηση, όταν γίνει σύγκριση με το αποτέλεσμα στο <u>ΒΗΜΑ 5.</u>

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΜΑΘΗΤΡΙΑΣ – ΜΑΘΗΤΗ

ΒΗΜΑ 1

Ανοίγουμε το αρχείο «Διαμέριση-Κατώτερο και ανώτερο άθροισμα».

Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)= x + \dfrac{1}{2x^2}$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου χωρίου ABED που περικλείεται από τον άξονα x΄x τις κατακόρυφες ευθείες $x = 1$, $x = 3$ και την γραφική παράσταση της f(x).

- Ποιο ολοκλήρωμα δίνει το εμβαδόν του χωρίου ; $(\mathrm{ABED}) = \int$

- Υπολόγισε το ολοκλήρωμα : $\left(\mathrm{ABED}\right)=\int$

Το πρόγραμμα υπολογίζει το εμβαδόν με τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος.

Στην αρχική οθόνη το πλήθος των ίσων διαμερίσεων του $\left[1,3\right]$ είναι $\mathrm{n}=2$

- Γράψε στο φύλλο (βλέποντας την οθόνη) με πόσο ισούται για $\mathrm{n}=2$:
- Το κατώτερο άθροισμα: $\mathrm{L}=$ Το ανώτερο άθροισμα : $\mathrm{U}=$
- Η αρχική προσέγγιση του εμβαδού: $\mathrm{E}=$

Σύρε την μαύρη τελεία στον δρομέα ώστε το πλήθος τους n να πάρει μία τιμή κοντά στο 10,100, τέρμα δεξιά. Πόσο γίνεται τότε:

- Για $\mathrm{n}=$ είναι : $\mathrm{L}=$ $\mathrm{U}=$ $\mathrm{E}=$
- Για $\mathrm{n}=$ είναι : $\mathrm{L}=$ $\mathrm{U}=$ $\mathrm{E}=$
- Για $\mathrm{n}=$ είναι : $\mathrm{L}=$ $\mathrm{U}=$ $\mathrm{E}=$

Πότε έχουμε καλύτερες μετρήσεις του εμβαδού (ολοκληρώματος) ;

Σύγκρινε το αποτέλεσμα που βρήκες με αυτό του προγράμματος. Συμφωνεί;

ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

ΒΗΜΑ 2

Ανοίγουμε το αρχείο «Χωρισμός ισεμβαδικών χωρίων με κατακόρυφη ευθεία».

Εμφανίζεται όπως και πριν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)= x + $\frac{1}{2x^2}$. Θέλουμε να βρούμε κατακόρυφη ευθεία $\mathrm{x}=\mathrm{c}$ έτσι ώστε το μεικτόγραμμου χωρίο ABED να χωριστεί σε δύο ισεμβαδικά μέρη. Δηλαδή $\mathrm{E}_1=\left(\mathrm{ACFD}\right)=\mathrm{E}_2=\left(\mathrm{CBEF}\right)$.

- Ποιο ολοκλήρωμα δίνει (για τις διάφορες τιμές του c) το εμβαδόν του χωρίου ACFD; Υπολόγισε το ολοκλήρωμα : $\mathrm{E}_1=\int$

Δεδομένου ότι, στο προηγούμενο βήμα υπολογίσαμε ότι (ABED) = $\frac{13}{3}$, προσπάθησε να καταλήξεις σε μια εξίσωση με την λύση της οποίας θα βρούμε τη ζητούμενη τιμή του c.Μπορείς να την λύσεις ; ΝΑΙ □ ΟΧΙ □ . Ποιο πρόβλημα υπάρχει;

Σύρε με το ποντίκι την μαύρη τελεία στον δρομέα των διαμερίσεων n σε τέτοια θέση ώστε να πετύχεις την καλύτερη προσέγγιση στον υπολογισμό των εμβαδών.

Σύρε με το ποντίκι την πράσινη τελεία στον δρομέα c ώστε η μέτρηση του λόγου των εμβαδών να πάρει την τιμή 1. Η τιμή του c είναι : $\mathrm{c}=$ Η εξίσωση της ζητούμενης κατακόρυφης ευθείας είναι ; ....

(Προαιρετικά)

Άνοιξε το αρχείο «Επαναπροσδιορισμός ορίων-Κάθετης ευθείας» και διάλεξε με το δρομέα a μια τιμή a $\in$ (1 , 2) για την κατακόρυφη ευθεία x = a . Διάλεξε με το δρομέα b μια τιμή b $\in$ (6 , 7,5) για την κατακόρυφη ευθεία x = b. Όπως και πριν βρες την εξίσωση της κατακόρυφης ευθείας x = c. Για a = και b = προκύπτει ως λύση η ευθεία x =

ΒΗΜΑ 3

Ανοίγουμε το αρχείο «Ισεμβαδικά χωρία με χρήση πλάγιας ευθείας».

Εμφανίζεται όπως και πριν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)= x + \frac{1}{2x^2}$.

Θέλουμε να βρούμε πλάγια ευθεία της μορφής y = λ x , λ > 0 τέτοια ώστε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου χωρίου CFED να ισούται με το εμβαδόν του χωρίου ABFC.

- Βρες τις συντεταγμένες των σημείων C και F συναρτήσει του λ.
- Τι σχήμα είναι το ABFC;
- Δεδομένου ότι, σε προηγούμενο βήμα υπολογίσαμε ότι (ABED) = $\frac{13}{3}$, βρες μια εξίσωση από την οποία να προκύπτει η ζητούμενη τιμή του λ. Λύσε την εξίσωση και υπολόγισε το λ. Είναι C(,) F(,). Το ABFC είναι ....

Σύρε με το ποντίκι την μαύρη τελεία στον δρομέα των διαμερίσεων n σε τέτοια θέση ώστε να πετύχεις την καλύτερη προσέγγιση στον υπολογισμό των εμβαδών.

Σύρε με το ποντίκι την πράσινη τελεία στον δρομέα λ ώστε η μέτρηση του λόγου των εμβαδών να πάρει την τιμή 1. Η τιμή του λ είναι :λ = Η εξίσωση της ζητούμενης πλάγιας ευθείας είναι ....

ΒΗΜΑ 4

Ανοίγουμε το αρχείο «Ισεμβαδικά χωρία με χρήση οριζόντιας ευθείας».

Θέλουμε να βρούμε οριζόντια ευθεία y = c έτσι ώστε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου χωρίου AHFD να ισούται με το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου FGE.

- Μπορείς να υπολογίσεις συναρτήσει του c τις συντεταγμένες του σημείου F; ΝΑΙ □ ΟΧΙ □ Ποια δυσκολία υπάρχει; ....
- Χρησιμοποίησε το GEOGEBRA για να λύσεις το πρόβλημα.
- Ποια τιμή του c δίνει λόγο εμβαδών ίσο με τη μονάδα; Ποια είναι τότε η εξίσωση της ζητούμενης οριζόντιας ευθείας; Για c = προκύπτει ως λύση η ευθεία:....

ΒΗΜΑ 5

Ανοίγουμε το αρχείο «Υπολογισμός ορίου εμβαδού μεικτόγραμμου χωρίου».

Υπάρχουν επίσης οι κατακόρυφες ευθείες x = 1 και x = b με b > 1 και η διχοτόμος της πρώτης γωνίας των αξόνων που είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f(x). Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου χωρίου CFED.

- Βρες συναρτήσει του b το εμβαδόν του τραπεζίου ABFC
- Βρες συναρτήσει του b το εμβαδόν του χωρίου CFED

Μετακινώντας κατάλληλα τους δρομείς, διάλεξε μια τιμή b $\in$ (3 , 7) και σημείωσε το εμβαδόν. Για b = προκύπτει (CFED) =
Μετακινώντας κατάλληλα τους δρομείς, διάλεξε μια τιμή b $\in$ (18 , 22) και σημείωσε το εμβαδόν. Για b = προκύπτει (CFED) =
Μετακινώντας κατάλληλα τους δρομείς, διάλεξε μια τιμή b > 90 και σημείωσε το εμβαδόν. Για b = προκύπτει (CFED) =
Τι νομίζεις ότι θα συμβεί με το εμβαδόν του χωρίου CFED όταν το b $\to +\infty$;

- Το (CFED) θα είναι πεπερασμένο □ Το (CFED) θα είναι άπειρο □

Υπολόγισε το εμβαδόν του χωρίου CFED καθώς το b $\to +\infty$

- Επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα την αρχική σου υποψία; ΝΑΙ □ ΟΧΙ □
- Τι αριθμητική διαφορά υπάρχει ανάμεσα στα δύο αποτελέσματα;

ΒΗΜΑ 6

Ανοίγουμε το αρχείο «Υπολογισμός ορίου εμβαδού μεικτόγραμμου χωρίου συναρτήσεων».
Υπάρχουν επίσης οι κατακόρυφες ευθείες x = α με α $\in$(0 , 1) και $x = 1$ και η διχοτόμος της πρώτης γωνίας των αξόνων. Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου χωρίου CFED.

- Βρες συναρτήσει του α το εμβαδόν του τραπεζίου ABFC
- Βρες συναρτήσει του α το εμβαδόν του χωρίου CFED

Μετακινώντας τους δρομείς, διάλεξε μια τιμή περίπου ίση με 0,85 για το α και σημείωσε το εμβαδόν. Για α = προκύπτει (CFED) =
Μετακινώντας τους δρομείς, διάλεξε μια τιμή περίπου ίση με 0,5 για το α και σημείωσε το εμβαδόν. Για α = προκύπτει (CFED) =
Μετακινώντας τους δρομείς, διάλεξε μια τιμή περίπου ίση με 0,1 για το α και σημείωσε το εμβαδόν. Για α = προκύπτει (CFED) =
Τι νομίζεις ότι θα συμβεί με το εμβαδόν του χωρίου CFED καθώς το α $\to 0^+$;

- Το (CFED) θα είναι πεπερασμένο □ Το (CFED) θα είναι άπειρο □

Υπολόγισε το εμβαδόν του χωρίου CFED καθώς το α $\to 0^+$

- Επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα την αρχική σου υποψία; ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

- Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = 1 + \eta\mu x$, $x \in [0, 3\pi]$ και τις εφαπτόμενές της στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 3\pi$. Στη συνέχεια χωρίστε το χωρίο σε δύο ισεμβαδικά μέρη με ευθείες παράλληλες στους άξονες.
- Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 0$ και $x = 2\pi$.
- Χωρίστε το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + 12$ και τη συνάρτηση $g(x) = -x^2 + 9$ σε δύο ισεμβαδικά μέρη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Brousseau. G. (1997). Theory of didactical situations in Mathematics, Kluwer Academic Publishers.
2. Dagdilelis. V. & Papadopoulos, I. (2004). An Open Problem in the Use of Software for Educational Purposes, in E. McKay (Ed.), Proceedings of International Conference on Computers in Education '2004, 919-924, RMIT University, Australia.
3. Papadopoulos, I. & Dagdilelis, V. (2006). The Theory of Transactional Distance as a framework for the analysis of computer aided teaching of geometry, International Journal for Technology in Mathematics Education, 13 (4), 175-182.
4. Polya, G. (1973). How to solve it, Princeton: Princeton University Press.
5. Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών, Εκδ. Ελληνικά Γράμματα.
6. Κυνηγός, Χ. (2007) Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη διδακτική των Μαθηματικών: Από την έρευνα στη σχολική τάξη. Εκδ. Ελληνικά Γράμματα.